CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 1, No 1, 2020
DOI: 10.25037/vj.v1i1.11

JOURNAL OF
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

The Dominating Set of the Operation of Special Graphs

Hendry Dwi Saputro[1,2], Ika Hesti A.[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT- University of Jember
[2]Department of Mathematics Education - University of Jember
[3]Department of Information System - University of Jember
hendry.dws29@gmail.com; Hestyarin@gmail.com; d.dafik@unej.ac.id

Abstract

A set D of vertices of a simple graph G, that is a graph without loops and multiple edges, is called a dominating set if every vertex $u \in V(G) - D$ is adjacent to some vertex $v \in D$. The domination number of a graph G, denoted by $\gamma(G)$, is the order of a smallest dominating set of G. A dominating set D with $|D| = \gamma(G)$ is called a minimum dominating set. We will show *dominating set* of graph operation of special graph (P_n, K_m, *cycle* C_n, W_m, *ladder* L_n, Bt_m, and special graph G_1, G_2.

Keywords: Dominating Set, Domination Number, Graf Hasil Operasi.
Mathematic Subject Clasification: 05C12

Pendahuluan

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan ($V(G)$, $E(G)$) dimana $V(G)$ adalah sebuah himpunan berhingga tak kosong yang elemen-elemennya dinamakan titik (*vertex*), sedangkan $E(G)$ adalah sebuah himpunan sisi (*edge*) berbentuk garis lurus atau lengkung yang menghubungkan dua buah titik. Salah satu kajian dalam teori graf adalah *dominating set*. Himpunan D dari titik graf sederhana G dinamakan *dominating set* jika setiap titik $u \in V(G) - D$ *adjacent* ke beberapa titik $v \in D$ [?]. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan γ (G).

Dominating set banyak diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, diantaranya untuk memodelkan keterkaitan pada jaringan komunikasi komputer, pemasangan kamera pengawas, teori jaringan sosial, penempatan pos pantau polisi, dan lain sebagainya. Pada artikel ini akan dipelajari tentang *dominating set* pada hasil operasi graf hhusus, diantaranya graf $G_1[G_2]$, $P_n[K_m]$, $C_n[W_m]$, $L_n[K_m]$, $P_n[Bt_m]$, *Amal* $(G, v = x_i, r)$, dan *Amal* $(Bt_n, v = x_2, r)$.

Berikut adalah penjelasan dari operasi graf yang dipakai dalam penelitian ini. *Composition* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G = G_1[G_2]$, yaitu graf dengan himpunan titik $V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) di G adjacent ketika (u_1 *adj* v_1) atau ($u_1 = v_1$ dan u_2 *adj* v_2) *Amalgamation* titik dinotasikan dengan *Amal* (G, v, r) dimana G adalah suatu keluarga graf berhingga, setiap G mempunyai suatu titik v yang disebut titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf G yang akan di-*amalgamation*

Sebelumnya, telah melakukan penelitian tentang *dominating set* pada

Received: 12 20, 2019; **Revised:** 02 05, 2020; **Accepted:** 03 25, 2020; **Published:** 06 26, 2020

graf jaring laba-laba Wb_n, parasut PC_n, helm $H_{n,m}$, dan regular $A_{2n,m}$. Kemudian [?] juga melakukan penelitian tentang *dominating set* pada graf rem cakram $Db_{n,m}$, prisma $D_{m,n}$, lampion $\pounds_{n,m}$, tingkat tangga prisma $Dt_{n,m}$, dan *Amal* $(C_n, 1, m)$. Penelitian mengenai *dominating set* pada graf tribun $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$, rantai pentagon $\mathfrak{BC}_\mathfrak{n}$, *Shack* (S_m, n), $C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)$, $C_n + P_n$, lobster $L_{i,j,k}$, *triangular ladder* L_n, $P_2 \otimes C_n$, dan $P_n[C_3]$ telah dilakukan oleh [8]. [?] dan [?] telah melakukan penelitian tentang aplikasi teori *dominating set* pada analisis morfologi jalan. Kemudian masih di tahun yang sama, [?] juga melakukan penelitian tentang *dominating set* pada graf Fl_n, $\vartheta_{n,m}$, $F_{n,k}$, $B_{n,m}$, dan $CR_{n,m}$, serta mengaplikasikan teori *dominating set* pada analisis topologi jaringan *Wide Area Network* (WAN).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka peneliti akan mengembangkan teori *dominating set* pada hasil operasi graf khusus, yaitu graf $G_1[G_2]$, $P_n[K_m]$, $C_n[W_m]$, $L_n[K_m]$, $P_n[Bt_m]$, *Amal* $(G, v = x_i, r)$, dan *Amal* $(Bt_n, v = x_2, r)$.

Teorema yang Digunakan

◇ **Teorema 1** *Untuk sebarang graf G, maka* $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma\ (G) \leq p - \Delta\ (G)$.

Bukti: Misalkan S adalah sebuah *dominating set* dari G. Untuk batas bawahnya, setiap titik dapat sebagai *dominating set* dan mempunyai $\Delta(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma(G) \geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$. Untuk batas atasnya, misalkan v adalah titik dengan derajat maksimum $(\Delta(G))$ dan $N[v]$ merupakan titik yang *adjacent* dengan v. Maka v sebagai *dominating set* dari $N[v]$ dan titik-titik di $V - N[v]$ merupakan *dominating set* mereka sendiri. Berakibat, $V - N[v]$ merupakan *dominating set* dengan kardinalitas $p - \Delta(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq p - \Delta(G)$. Maka $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$ [?].

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini diperoleh 2 teorema dan 5 akibat yaitu *domination number* pada graf $G_1[G_2]$, $P_n[K_m]$, $C_n[W_m]$, $L_n[K_m]$, $P_n[Bt_m]$, *Amal* $(G, v = x_i, r)$, dan *Amal* $(Bt_n, v = x_2, r)$.

Teorema yang pertama adalah *domination number* pada hasil operasi *composition* dari sebarang dua graf sederhana. Teoremanya adalah sebagai berikut:

◇ **Teorema 2** *Misal* G_1 *dan* G_2 *adalah sebarang graf sederhana dengan* $\Delta\ (G_2) = |V(G_2)| - 1$. *Maka domination number dari* $\gamma\ (G_1[G_2]) = \gamma\ (G_1)$.

Bukti. *Composition* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G = G_1[G_2]$, yaitu graf dengan himpunan titik $V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) di G adjacent ketika (u_1 *adj* v_1) atau ($u_1 = v_1$ dan u_2 *adj* v_2). Misal $|V(G_1)| = m$ dan $|V(G_2)| = n$ maka $|V(G_1[G_2])| = mn$. Misal $\Delta\ (G_1) = k$, dimana $k \leq m-1$ maka $\lceil \frac{m}{k+1} \rceil \leq \gamma\ (G_1) \leq m-k$ dan misal $\Delta\ (G_2) = n-1$ maka $\Delta\ (G_1[G_2]) = n(k+1)-1$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq |V(G_1)|; x_i \in V(G_1); x_i$ adalah *dominating set* di $G_1; y_j$ adalah sebarang satu titik di G_2; dimana $\Delta\ (y_j) = |V(G_2)| - 1\}$, maka dapat dilihat bahwa D *adjacent* dengan semua elemen $V \backslash D$. $|D| = \gamma\ (G_1)$ sehingga $\gamma\ (G_1[G_2]) = \gamma\ (G_1)$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G_1[G_2])} \rceil \leq \gamma\ (G_1[G_2]) \leq p - \Delta\ (G_1[G_2])$, substitusikan nilai p dan $\Delta\ (G_1[G_2])$ menjadi $\lceil \frac{mn}{n(k+1)} \rceil \leq \gamma\ (G_1[G_2]) \leq mn - (n(k+1)-1)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $\lceil \frac{m}{k+1} \rceil \leq \gamma\ (G_1[G_2]) \leq mn - nk - n + 1$. Untuk $\gamma\ (G_1) = \lceil \frac{m}{k+1} \rceil$, maka $\gamma\ (G_1[G_2])$ berada pada batas bawah *domination number*. Untuk $\lceil \frac{m}{k+1} \rceil < \gamma\ (G_1) \leq m-k$ akan ditunjukkan $m - k \leq mn - nk - n + 1$. $mn - nk - n + 1 = m - k(n - \frac{n}{m-k} + \frac{1}{m-k})$. Untuk $m > 1$, $n \geq 1$, dan $k < m-1$, ambil m dan n terkecil yaitu $m = 2$ dan $n = 1$ sehingga $n - \frac{n}{m-k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{m-k} = \frac{1}{2}$. Sehingga untuk $m > 1$, $n \geq 1$, dan $k < m-1$ diperoleh $n - \frac{n}{m-k} \geq \frac{1}{2}$ dan $0 < \frac{1}{m-k} \leq \frac{1}{2}$, sehingga $n - \frac{n}{m-k} + \frac{1}{m-k} \geq 1$. Hal ini mengakibatkan $m - k(n - \frac{n}{m-k} + \frac{1}{m-k}) \geq m - k$. Sehingga diperoleh $m - k \leq mn - nk - n + 1$. Maka $\gamma\ (G_1[G_2])$ berada pada selang *domination number* untuk $\lceil \frac{m}{k+1} \rceil < \gamma\ (G_1) \leq m-k$. □

Selanjutnya akan disajikan akibat yang pertama dari Teorema 2.1, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf $P_n[K_m]$. Berikut adalah akibat yang pertama dari Teorema 2.1.

Akibat 1 *Misal G adalah graf hasil operasi composition dari graf lintasan P_n dan graf lengkap K_m, dimana $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka $\gamma\ (P_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Bukti. Graf $P_n[K_m]$ adalah graf dengan $V(P_n[K_m]) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(P_n[K_m]) = \{x_i y_j\ x_i y_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; j \neq k\} \cup \{x_i y_j\ x_{i+1} y_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\}$, $|V(P_n[K_m])| = mn$, $|E(P_n[K_m])| = \frac{mn(m-1)}{2} + m^2(n-1)$, dan terdapat dua kemungkinan $\Delta\ (P_n[K_m])$, yaitu $\Delta\ (P_n[K_m]) = 2m-1$ untuk $n = 2$ dan $\Delta\ (P_n[K_m]) = 3m-1$ untuk $n \geq 3$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_{i-1} y_j; 1 \leq i \leq n; i =$ kelipatan $3; y_j$ adalah sebarang satu titik di $K_m\} \cup \{x_n y_j; n = 3k+1$; dimana $k \in A; y_j$ adalah sebarang satu titik di $K_m\}$, maka dapat dilihat bahwa D *adjacent* dengan semua elemen $V \backslash D$. $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ sehingga $\gamma\ (P_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[K_m])} \rceil \leq \gamma\ (P_n[K_m]) \leq p - \Delta\ (P_n[K_m])$, substitusikan nilai p dan Δ

$(P_n[K_m])$. Untuk $n = 2$ maka Δ $(P_n[K_m]) = 2m - 1$ sehingga $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[K_m])} \rceil \leq \gamma$ $(P_n[K_m]) \leq p - \Delta$ $(P_n[K_m])$ menjadi $\lceil \frac{2m}{2m} \rceil \leq \gamma$ $(P_n[K_m]) \leq 2m - (2m - 1)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $1 \leq \gamma$ $(P_n[K_m]) \leq 1$. Maka γ $(P_n[K_m])$ berada pada batas bawah *domination number*. Untuk $n \geq 3$ maka Δ $(P_n[K_m]) = 3m-1$ sehingga $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[K_m])} \rceil \leq \gamma$ $(P_n[K_m]) \leq p - \Delta$ $(P_n[K_m])$ menjadi $\lceil \frac{mn}{3m} \rceil \leq \gamma$ $(P_n[K_m]) \leq mn-(3m-1)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \gamma$ $(P_n[K_m]) \leq mn - 3m + 1$. Maka γ $(P_n[K_m])$ berada pada batas bawah *domination number*. □

Selanjutnya akan disajikan akibat yang kedua dari Teorema 2.1, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf $C_n[W_m]$. Berikut adalah akibat yang kedua dari Teorema 2.1.

Akibat 2 *Misal* G *adalah graf hasil operasi composition dari graf cycle* C_n *dan graf roda* W_m*, dimana* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 3$*, maka* γ $(C_n[W_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Bukti. Graf $C_n[W_m]$ adalah graf dengan $V(C_n[W_m]) = \{x_iA, x_iy_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(C_n[W_m]) = \{x_iy_j\ x_iy_{j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_iy_m\ x_iy_1; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iA\ x_iy_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_iy_j\ x_{i+1}y_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_ny_j\ x_1y_k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_iA\ x_{i+1}A; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nA\ x_1A\} \cup \{x_iA\ x_{i+1}y_j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_nA\ x_1y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_iA\ x_{i-1}y_j; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_1A\ x_ny_j; 1 \leq j \leq m\}$, $|V(C_n[W_m])| = n(m+1)$, $|E(C_n[W_m])| = m^2n + 4mn + n$, dan Δ $(C_n[W_m]) = 3(m+1) - 1$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_{i-1}A; 1 \leq i \leq n; i = \text{kelipatan } 3\} \cup \{x_nA; n = 3k+1; \text{dimana } k \in A\}$, maka dapat dilihat bahwa D *adjacent* dengan semua elemen $V \backslash D$. $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ sehingga γ $(C_n[W_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n[W_m])} \rceil \leq \gamma$ $(C_n[W_m]) \leq p - \Delta$ $(C_n[W_m])$, substitusikan nilai p dan Δ $(C_n[W_m])$ menjadi $\lceil \frac{n(m+1)}{3(m+1)} \rceil \leq \gamma$ $(C_n[W_m]) \leq mn - (3(m+1) - 1)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \gamma$ $(C_n[W_m]) \leq mn - 3m + n - 2$. Maka γ $(C_n[W_m])$ berada pada batas bawah *domination number*. □

Selanjutnya akan disajikan akibat yang ketiga dari Teorema 2.1, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf $L_n[K_m]$. Berikut adalah akibat yang ketiga dari Teorema 2.1.

Akibat 3 *Misal* G *adalah graf hasil operasi composition dari graf ladder* L_n *dan graf lengkap* K_m*, dimana* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 3$*, maka domination number dari*

$(L_n[K_m])$ *adalah sebagai berikut:*

$$\gamma\left(L_n[K_m]\right)=\begin{cases}\lceil \frac{n}{2}\rceil \quad, & \text{dimana } n=\text{ganjil.}\\ \frac{n}{2}+1, & \text{dimana } n=\text{genap.}\end{cases}$$

Bukti. Graf $L_n[K_m]$ adalah graf dengan $V(L_n[K_m]) = \{y_ix_j, z_ix_j; 1 \le i \le n; 1 \le j \le m\}$, $E(L_n[K_m]) = \{y_ix_j\ y_ix_k; 1 \le i \le n; 1 \le j \le m; 1 \le k \le m; j \neq k\} \cup \{z_ix_j\ z_ix_k; 1 \le i \le n; 1 \le j \le m; 1 \le k \le m; j \neq k\} \cup \{y_ix_j\ y_{i+1}x_k; 1 \le i \le n-1; 1 \le j \le m; 1 \le k \le m\} \cup \{y_ix_j\ z_ix_k; 1 \le i \le n; 1 \le j \le m; 1 \le k \le m\} \cup \{z_ix_j\ z_{i+1}x_k; 1 \le i \le n-1; 1 \le j \le m; 1 \le k \le m\}$, $|V(L_n[K_m])| = 2mn$, $|E(L_n[K_m])| = 4m^2n - 2m^2 - mn$, dan $\Delta\ (L_n[K_m]) = 4m - 1$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{y_{4i-3}x_j; 1 \le i \le \lceil\frac{n}{4}\rceil; y_j$ adalah sebarang satu titik di $K_m\} \cup \{\{z_{4i-1}x_j; 1 \le i \le \lceil\frac{n}{4}\rceil; y_j$ adalah sebarang satu titik di $K_m; n = 4k$ atau $n = 4k-1$; dimana $k \in A\}$ atau $\{z_{4i-1}x_j; 1 \le i < \lceil\frac{n}{4}\rceil; y_j$ adalah sebarang satu titik di $K_m; n = 4k-2$ atau $n = 4k-3$; dimana $k \in A\}\}$ $\cup\ \{y_nx_j, y_j$ adalah sebarang satu titik di $K_m\ m; n = 4k$; dimana $k \in A\} \cup \{z_nx_j, y_j$ adalah sebarang satu titik di $K_m; n = 4k-2$; dimana $k \in A\}$, maka dapat dilihat bahwa D *adjacent* dengan semua elemen $V\backslash D$. $|D| = \lceil\frac{n}{2}\rceil$ untuk n ganjil dan $|D| = \frac{n}{2}+1$ untuk n genap, sehingga $\gamma\ (L_n[K_m]) = \lceil\frac{n}{2}\rceil$ untuk n ganjil dan $\gamma\ (L_n[K_m]) = \frac{n}{2}+1$ untuk n genap. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil\frac{p}{1+\Delta(L_n[K_m])}\rceil \le \gamma\ (L_n[K_m]) \le p - \Delta\ (L_n[K_m])$, substitusikan nilai p dan $\Delta\ (L_n[K_m])$ menjadi $\lceil\frac{2mn}{4m}\rceil \le \gamma\ (L_n[K_m]) \le 2mn - (4m-1)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $\lceil\frac{n}{2}\rceil \le \gamma\ (L_n[K_m]) \le 2mn - 4m + 1$. $\gamma\ (L_n[K_m])$ berada pada batas bawah *domination number* untuk n ganjil dan $\gamma\ (L_n[K_m])$ berada pada batas bawah *domination number* ditambah satu untuk n genap. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\frac{n}{2}+1 \le 2mn-4m+1$. $2mn-4m+1 = \frac{n}{2}(4m - \frac{8m}{n} + \frac{2}{n})$. Untuk sebarang $m \ge 3$ dan $n \ge 4$ dimana n genap diperoleh $6 \le 4m - \frac{8m}{n} < 4m$ dan $\frac{2}{n} \le \frac{1}{2}$, sehingga $4m - \frac{8m}{n} + \frac{2}{n} > 6$. Hal ini mengakibatkan $\frac{n}{2}(4m - \frac{8m}{n} + \frac{2}{n}) > \frac{n}{2}+1$. Sehingga diperoleh $\frac{n}{2}+1 < 2mn-4m+1$. Maka $\frac{n}{2}+1$ selalu berada pada selang *domination number*. Maka $\gamma\ (L_n[K_m])$ berada pada batas bawah *domination number* untuk n ganjil dan $\gamma\ (L_n[K_m])$ berada pada batas bawah *domination number* ditambah satu untuk n genap. □

Selanjutnya akan disajikan akibat yang keempat dari Teorema 2.1, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf $P_n[Bt_m]$. Berikut adalah akibat yang keempat dari Teorema 2.1.

Akibat 4 *Misal G adalah graf hasil operasi composition dari graf lintasan P_n dan graf buku segitiga Bt_m, dimana $n \ge 2$ dan $m \ge 2$, maka $\gamma\ (P_n[Bt_m]) = \lceil\frac{n}{3}\rceil$.*

Bukti. Graf $P_n[Bt_m]$ adalah graf dengan $V(P_n[Bt_m]) = \{x_iy_j, x_iz_k; 1 \le i \le n; 1 \le j \le 2; 1 \le k \le m\}$, $E(P_n[Bt_m]) = \{x_iy_j\ x_iy_{j+1}; 1 \le i \le n; j = 1\} \cup \{x_iy_j\ x_iz_k; 1 \le i \le n; 1 \le j \le 2; 1 \le k \le m\} \cup \{x_iy_j\ x_{i+1}y_l; 1 \le i \le n-1; 1 \le j \le 2; 1 \le l \le 2\} \cup \{x_iy_j\ x_{i+1}z_k; 1 \le i \le n-1; 1 \le j \le 2; 1 \le k \le m\}$ $\cup$ $\{x_iy_j\ x_{i-1}z_k; 2 \le i \le n; 1 \le j \le 2; 1 \le k \le m\} \cup \{x_iz_k\ x_{i+1}z_l; 1 \le i \le n-1; 1 \le k \le m; 1 \le l \le m\}$, $|V(P_n[Bt_m])| = n(m+2)$, $|E(P_n[Bt_m])| = m^2n - m^2 + 6mn - 4m + 5n - 4$, dan terdapat dua kemungkinan Δ $(P_n[Bt_m])$, yaitu Δ $(P_n[Bt_m]) = 2m+3$ untuk $n = 2$ dan Δ $(P_n[Bt_m]) = 3m+5$ untuk $n \ge 3$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_{i-1}y_j; 1 \le i \le n; i =$ kelipatan $3; y_j$ adalah sebarang satu titik di Bt_m; dimana Δ $(y_j) = |V(Bt_m)| - 1\}$ $\cup$ $\{x_ny_j; y_j$ adalah sebarang satu titik di Bt_m; dimana Δ $(y_j) = |V(Bt_m)| - 1\}; n = 3k+1$; dimana $k \in A\}$, maka dapat dilihat bahwa D *adjacent* dengan semua elemen $V \backslash D$. $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ sehingga γ $(P_n[Bt_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[Bt_m])} \rceil \le \gamma$ $(P_n[Bt_m]) \le p - \Delta$ $(P_n[Bt_m])$, substitusikan nilai p dan Δ $(P_n[Bt_m])$. Untuk $n = 2$ maka Δ $(P_n[Bt_m]) = 2m+3$ sehingga $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[Bt_m])} \rceil \le \gamma$ $(P_n[Bt_m]) \le p - \Delta$ $(P_n[Bt_m])$ menjadi $\lceil \frac{2m+4}{2m+4} \rceil \le \gamma$ $(P_n[Bt_m]) \le (2m+4) - (2m+3)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $1 \le \gamma$ $(P_n[Bt_m]) \le 1$. Maka γ $(P_n[Bt_m])$ berada pada batas bawah *domination number*. Untuk $n \ge 3$ maka Δ $(P_n[Bt_m]) = 3m+5$ sehingga $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[Bt_m])} \rceil \le \gamma$ $(P_n[Bt_m]) \le p - \Delta$ $(P_n[Bt_m])$ menjadi $\lceil \frac{n(m+2)}{3m+6} \rceil \le \gamma$ $(P_n[Bt_m]) \le n(m+2) - (3m+5)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $\lceil \frac{n}{3} \rceil \le \gamma$ $(P_n[Bt_m]) \le mn - 3m + 2n - 5$. Maka γ $(P_n[Bt_m])$ berada pada batas bawah *domination number*. □

Teorema yang kedua adalah *domination number* pada hasil operasi *amalgamation* dari sebarang graf sederhana. Teoremanya adalah sebagai berikut:

◇ **Teorema 3** *Misal G adalah sebarang graf sederhana dengan Δ $(G) = |V(G)| - 1$. Maka domination number dari γ (Amal $(G, v = x_i, r)) = 1$, dimana $x_i \in V(G)$, Δ $(x_i) = |V(G)| - 1$, dan $r \ge 2$.*

Bukti. *Amalgamation* titik dari suatu graf G dinotasikan dengan *Amal* (G, v, r) dimana G adalah suatu keluarga graf berhingga, setiap G mempunyai suatu titik v yang disebut titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf G yang akan di-*amalgamation*. Misal G adalah sebarang graf sederhana dengan $|V(G)| = m$ dan Δ $(G) = m-1$, maka $|V(Amal\ (G, v = x_i, r))| = r(m-1)+1$ dimana x_i adalah titik terminal berderajat $m-1$, sehingga Δ $(Amal\ (G, v = x_i, r) = r(m-1)$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_i; \Delta\ (x_i) = |V(G)| - 1\}$, maka dapat dilihat bahwa D *adjacent* dengan semua elemen $V \backslash D$. $|D| = 1$ sehingga γ $(Amal\ (G, v = x_i, r)) = 1$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa

$\lceil \frac{p}{1+\Delta(Amal(G,v=x_i,r))} \rceil \leq \gamma\ (Amal\ (G, v = x_i, r)) \leq p - \Delta\ (Amal\ (G, v = x_i, r))$, substitusikan nilai p dan $\Delta\ (Amal\ (G, v = x_i, r))$ menjadi $\lceil \frac{r(m-1)+1}{r(m-1)+1} \rceil \leq \gamma\ (Amal\ (G, v = x_i, r)) \leq (r(m-1)+1) - r(m-1)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $1 \leq \gamma\ (Amal\ (G, v = x_i, r)) \leq 1$. Maka $\gamma\ (Amal\ (G, v = x_i, r))$ berada pada batas bawah *domination number.* $\square$

Selanjutnya akan disajikan akibat dari Teorema 2.2, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf *Amal* $(Bt_n, v = x_2, r)$. Berikut adalah akibat dari Teorema 2.2.

Akibat 5 *Misal G adalah graf hasil operasi amalgamation dari graf Bt_n, dimana $n \geq 2$ dan $r \geq 2$, maka $\gamma\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r)) = 1$.*

Bukti. Graf *Amal* $(Bt_n, v = x_2, r)$ adalah graf dengan $V(Amal\ (Bt_n, v = x_2, r) = \{x_{1,k}, x_2; y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\}$, $E(Amal\ (Bt_n, v = x_2, r) = \{x_{i,k}\ x_2; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k}\ y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_2\ y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\}$, $|V(Amal\ (Bt_n, v = x_2, r))| = r(n+1)+1$, $|E(Amal\ (Bt_n, v = x_2, r))| = r(2n+1)$, dan $\Delta\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r) = r(n+1)$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_2\}$, maka dapat dilihat bahwa D *adjacent* dengan semua elemen $V \backslash D$. $|D| = 1$ sehingga $\gamma\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r)) = 1$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(Amal(Bt_n,v=x_2,r))} \rceil \leq \gamma\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r)) \leq p - \Delta\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r))$, substitusikan nilai p dan $\Delta\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r))$ menjadi $\lceil \frac{r(n+1)+1}{r(n+1)+1} \rceil \leq \gamma\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r)) \leq (r(n+1)+1) - r(n+1)$, sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $1 \leq \gamma\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r)) \leq 1$. Maka $\gamma\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r))$ berada pada batas bawah *domination number.* $\square$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bagian sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. $\gamma\ (G_1[G_2]) = \gamma\ (G_1)$, dimana $\Delta\ (G_2) = |V(G_2)| - 1$.
2. $\gamma\ (P_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, dimana $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.
3. $\gamma\ (C_n[W_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, dimana $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
4. $$\gamma\,(L_n[K_m]) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & , \quad \text{dimana } n \geq 3\,, m \geq 3\,, \text{dan}\, n = \text{ganjil}. \\ \frac{n}{2} + 1\,, & \quad \text{dimana } n > 3\,, m \geq 3\,, \text{dan}\, n = \text{genap}. \end{cases}$$
5. $\gamma\ (P_n[Bt_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, dimana $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.

6. $\gamma\ (Amal\ (G, v = x_i, r)) = 1$, dimana $x_i \in V(G)$, $\Delta\ (x_i) = |V(G)| - 1$, dan $r \geq 2$.
7. $\gamma\ (Amal\ (Bt_n, v = x_2, r)) = 1$, dimana $n \geq 2$ dan $r \geq 2$.

Masalaha Terbuka 1 *Peneliti memberikan saran kepada pembaca supaya dapat men- cari* domination number *pada hasil operasi sebarang graf khusus yang berada pada batas bawah domination number, yaitu graf* $G_1 \times G_2$, $G_1 \otimes G_2$, $G_1[G_2]$ *dimana* $\Delta\ G_2 \neq |V(G_2)| - 1$, *dan Shack* $(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$ *dimana* $r > 50$.

Referensi

[1] Agustin. I.H and Dafik. 2014. On The Domination Number of Some Families of Special Graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember.* 1 (1).

[2] Alfarisi. R. 2014. Penerapan Teknik Konstruksi Graf, Rainbow Connection, dan Dominating Set dalam Analisis Morfologi Jalan. Tidak dipublikasikan *Skripsi).* Jember: Universitas Jember.

[3] Alfarisi. R. ,Dafik and Fatahillah. A. 2014. Analisa Himpunan Dominasi pada Graf-Graf Khusus. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember.* 1 (1).

[4] Ardiyansah. R and Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits.* 2 (1).

[5] Harrary. F. 2007. *Graph Theory.* Addison: Wesley.

[6] Haynes. T. W. , Hedetniemi. S. T. and Slater. P. j.1998. *Fundamentals of Domination in Graphs.*New York: Marcel Dekker.

[7] Muharromah. A. 2014. Analisis Morfologi Jalan Kota dengan Penerapan Teori Graf Dominating Set. Tidak dipublikasikan *(Skripsi).* Jember: Universitas Jember

[8] Muharromah. A. , Agustin. H. I. and Dafik. 2014. Bilangan Dominasi pada Graf Hasil Operasi. it Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember.1 (1).

[9] Wardani. D. A. R. 2014. Analisis Topologi Jaringan Wide Area Network (WAN) dengan Penerapan Teori Graf Dominating Set. Tidak dipublikasikan *(Skripsi).* Jember: Universitas Jember.